

---

تعريف [section]

## فهرست مطالب

۱	نمایش اعداد و خطا	۱
۱	۱.۱ نمایش اعداد	۱
۲	۱.۱.۱ ارقام بامعنی و ارقام بامعنی درست	۲
۳	۲.۱ تقریب یک عدد و اندازه خطای آن	۳
۳	۱.۲.۱ تقریب یک عدد	۳
۳	۲.۲.۱ خطای تقریب	۳

# فصل ۱

## نمایش اعداد و خطا

### ۱.۱ نمایش اعداد

اعداد به دو شکل ممیز ثابت و ممیز شناور قابل نمایش هستند. در شکل نمایش ممیز ثابت، تعداد ارقام قبل و بعد از ممیز، ثابت می‌باشد.

#### تعریف ۱

[دقت ماشین] ماکزیمم تعداد ارقامی است که ماشین بطور دقیق قادر به نمایش آنها می‌باشد ماکزیمم تعداد ارقامی است که ماشین بطور دقیق قادر به نمایش آنها می‌باشد

فرض کنیم تعریف ۱ تعداد ارقام قبل و بعد از ممیز عدد  $A = ۳۲/۴$  به ترتیب برابر ۴ و ۲ باشد. از این‌رو، نمایش ممیز ثابت این عدد برابر  $A = ۰۰۳۲/۴۰$  است. چند عدد و نمایش ممیز شناور آنها در زیر آمده است:

$$\text{الف)} \quad A = ۳۲/۴ = ۰/۳۲۴ \times ۱۰^۲ = ۰/۰۳۲۴ \times ۱۰^۳ = ۰/۰۰۳۲۴ \times ۱۰^۴,$$

$$\text{ب)} \quad A = -۰/۰۰۲۴ = -۰/۰۰۲۴ \times ۱۰^۰ = -۰/۲۴ \times ۱۰^{-۲}.$$

به مثال زیر توجه کنید ([؟]): آونگ ساده‌ای به جرم  $m$  را در نظر بگیرید که با نخ به طول  $L$  به تکیه‌گاهی آویزان است و به اندازه زاویه  $\theta$  از حالت عمودی منحرف شده است (شکل (؟؟)). برای تعیین مدل ریاضی مسأله، از مقاومت هوا و اصطکاک بین نخ و آویز صرف‌نظر می‌کنیم.

حل

## ۱.۱.۱ ارقام بامعنی و ارقام بامعنی درست

## تعریف ۲

(ارقام بامعنی) ارقام بامعنی یک عدد ناصفر  $A$ ، همان ارقام بامعنی مانتیس  $A$  یعنی  $b$  تعریف می‌شوند که ارقام بامعنی  $b$  عبارتند از ارقام مخالف صفر  $b$ ، صفرهای بین این ارقام ناصفر و صفرهایی که بعد از آخرین رقم ناصفر برای نشان دادن دقت قرار می‌گیرند.

تعداد ارقام بامعنی چند عدد در زیر آمده است:

(الف)  $4$  رقم معنی‌دار  $A = 2/001 = 0/2001 \times 10^1 = 0/2001 \times 10^2$ ,

(ب)  $7$  رقم معنی‌دار  $A = 2/044365 = 0/2044365 \times 10^1$ ,

(ج)  $8$  رقم معنی‌دار  $A = -354/01100 = -0/35401100 \times 10^3$ ,

آیا دقت یک تقریب به تعداد ارقام بامعنی آن عدد بستگی دارد؟

## تعریف ۳

(ارقام بامعنی درست) فرض کنید  $a \neq 0$  تقریبی از عدد حقیقی ناصفر  $A$  باشد و

$$|a| = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots, \quad (1.1)$$

که  $a_m \neq 0$  برای  $m \in \mathbb{Z}$  و  $0 \leq a_i \leq 9$  به ازای  $i = m, m-1, \dots$  اعدادی صحیح باشند. اگر  $s$  تعداد ارقام بامعنی  $a$  باشد، آنگاه، بزرگترین عدد صحیح نامنفی  $n$  که  $n \leq s$  و در نامساوی

$$|A - a| \leq 5 \times 10^{m-n}, \quad (2.1)$$

صدق کند، تعداد ارقام بامعنی درست  $a$  نامیده می‌شود. اگر  $n > s$ ، آنگاه تعداد ارقام بامعنی درست  $a$ ، همان تعداد ارقام بامعنی  $a$  یعنی  $s$  است.

تعداد ارقام بامعنی درست تقریب‌های زیر را مشخص کنید:

(الف)  $A = 2$ ,  $a = 2/001$ ,

که ۲.۱ بنابراین  $m = 0$ . از طرفی،

اگر دو عدد  $a_1$  و  $a_2$  تقریبی از عدد  $A$  و دارای ارقام بامعنی درست یکسان باشند کدام یک تقریب بهتری

را می‌دهد؟

## ۲.۱ تقریب یک عدد و اندازه خطای آن

### ۱.۲.۱ تقریب یک عدد

اعداد زیر تا ۴ رقم بعد از اعشار گرد شده‌اند:

- الف)  $A = ۲/۰۰۳۴۲۵۱$ ,  $۰/۲۵۱ < ۰/۵$ ,  $a = ۲/۰۰۳۴$ ,  
 ب)  $A = -۲/۰۰۳۹۸۵۱$ ,  $۰/۸۵۱ > ۰/۵$ ,  $a = -۲/۰۰۴۰$ ,  
 ج)  $A = ۲/۰۰۳۴۵۰۰$ ,  $۰/۵۰۰ = ۰/۵$ ,  $b_۴ = ۴$  زوج,  $a = ۲/۰۰۳۴$ ,  
 د)  $A = ۲/۰۰۳۷۵۰۰$ ,  $۰/۵۰۰ = ۰/۵$ ,  $b_۴ = ۷$  فرد,  $a = ۲/۰۰۳۸$ .

اگر  $a$  گردشده عدد  $A$  تا  $n$  رقم اعشار باشد، آنگاه

$$|A - a| \leq ۰/۵ \times ۱۰^{-n}. \quad (۳.۱)$$

### ۲.۲.۱ خطای تقریب

#### تعریف ۴

فرض کنیم  $a$  تقریب عدد  $A$  باشد. آنگاه  $e(a) := |A - a|$  را **خطای مطلق** و  $\delta(a) := \frac{e(a)}{|A|} = \frac{|A - a|}{|A|}$  را **خطای نسبی** می‌نامند.

(قضیه انتشار خطا) اگر  $a$  و  $b$  به ترتیب تقریب‌هایی از  $A$  و  $B$  و همه این اعداد مثبت باشند، آنگاه:

$$e(a \pm b) \leq e(a) + e(b), \quad (\text{الف})$$